Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $6-3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2}=5^x+24$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care $AC=3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de $30°$, respectiv $60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det B=i$.

5p **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=e^{-2}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(6-3\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3=$	**3p**
	$=\left(\sqrt{3}\right)^2$, deci numerele $6-2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$25\cdot 5^x-5^x=24$, deci $5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte are 81 de elemente, deci sunt 81 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte sunt $3\cdot 9=27$ de numere care au cifra zecilor multiplu de 3, deci sunt 27 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{3}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, deci $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ și, cum $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$, obținem $\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$	**3p**
	Vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci dreptele MD și AB sunt paralele	**2p**
6.	Unghiul C are măsura egală cu $90°$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C	**2p**
	$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și, cum $AC=3$, obținem $AB=2\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & i & 0\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot i\cdot(-1)+0+0-(-2)\cdot i\cdot 1-0-0=$	**3p**
	$=-i+2i=i$	**2p**
b)	Cum $B\cdot B=-I_3$, $A(z_1)\cdot A(z_2)=(aI_3+bB)(cI_3+dB)=acI_3+adB+bcB+bdB\cdot B=$	**3p**
	$=(ac-bd)I_3+(ad+bc)B=A(z_1z_2)$, pentru orice $z_1=a+ib$ și $z_2=c+id$, cu a, b, c și d numere reale	**2p**
c)	$A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=A\big((1+i)(2+i)(3+i)(1-i)(2-i)(3-i)\big)=$	**2p**
	$=A\big((1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)\big)=A(2\cdot 5\cdot 10)=100I_3$, deci $n=100$	**3p**

2.a)	$x*y=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2^{y+1}+4+2\right)=$	**3p**
	$=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2\left(2^y-2\right)+2\right)=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**
b)	$x*e=x$ pentru orice $x\in M$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție, deci $\left(2^x-2\right)\left(2^e-3\right)=0$ pentru orice $x\in M$, de unde obținem $e=\log_2 3\in M$	**3p**
	Cum $\left(\log_2 3\right)*x=x$ pentru orice $x\in M$, obținem că $e=\log_2 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*x*x=\log_2\left(\left(2^x-2\right)^3+2\right)$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$\left(x*x*x\right)-3x=\log_2\left(\dfrac{\left(2^x-2\right)^3+2}{2^{3x}}\right)=\log_2\left(1-\dfrac{6\left(2^x-1\right)^2}{2^{3x}}\right)<0$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3+3x+1\right)'e^{-x}+\left(x^3+3x+1\right)\left(e^{-x}\right)'=\left(3x^2+3\right)e^{-x}-\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(-x^3+3x^2-3x+2\right)e^{-x}=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x}{x^3+3x+2}\right)^{x^3+3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{x^3+3x+2}\right)^{\frac{x^3+3x+2}{-2}}\right)^{\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=e^{-2}$	**2p**
c)	$g(x)=\left\|x^3+3x\right\|=\begin{cases}-x^3-3x, & x\in(-\infty,0)\\ x^3+3x, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$	**2p**
	g este continuă și, cum pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $g'(x)=-3x^2-3<0\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $g'(x)=3x^2+3>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că funcția g are un singur punct de extrem	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_4^6\frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=\int_4^6 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_4^6=$	**3p**
	$=18-8=10$	**2p**
b)	F este o primitivă a lui f, deci $F'(x)=f(x)=x\ln(x-1)$, de unde obținem că $F'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**3p**
	Cum $2<\sqrt{7}<3$, obținem că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x-1)dx=\left.\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)\right\|_3^5-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx=$	**3p**
	$=12\ln 4-4\ln 2-\left.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\|_3^5=20\ln 2-5=5\left(4\ln 2-1\right)$, de unde obținem $m=5$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2\log_2\sqrt{x-2} = \log_2 x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ și $M(2,4)$. Determinați coordonatele punctului N, știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a) = A(a) - A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \le 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4\cdot|z_1 z_2| + 1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z_1+i)(z_2-1)=(1-2i+i)(2+i-1)=(1-i)(1+i)=$	**2p**
	$=1-i^2=2$	**3p**
2.	$\Delta<0$ și, cum $\Delta=16-4m$, obținem $16-4m<0$	**3p**
	$m\in(4,+\infty)$	**2p**
3.	$1+\log_2(x-2)=\log_2 x$, deci $\log_2\frac{x}{x-2}=1$, de unde obținem $\frac{x}{x-2}=2$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul n din mulțimea A are exact doi multipli în mulțimea A dacă $2n\le 99<3n$, de unde obținem că numerele din mulțimea A care au exact doi multipli în mulțimea A sunt $34, 35, 36, ..., 49$, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{16}{90}=\frac{8}{45}$	**3p**
5.	$P(0,1)$, unde P este mijlocul segmentului AM	**2p**
	Segmentele AM și BN au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	**3p**
6.	$A+B=\pi-C$, deci $\sin C+\cos C=1$	**2p**
	$\sin^2 C+2\sin C\cos C+\cos^2 C=1\Rightarrow\sin 2C=0$ și, cum $C\in(0,\pi)$, obținem $C=\frac{\pi}{2}$, deci triunghiul ABC este dreptunghic	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\1&3&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot3\cdot1-2\cdot3\cdot1=$	**3p**
	$=1+6-3-1+3-6=0$	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, $B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\0&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a^3\\0&0&0\\a^3&0&0\end{pmatrix}=a^3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=a^3B(1)$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$\det\left(A(a)\right)=0$; cum $\det\left(A(a)\right)=-a^2+3a-2$, obținem $a=1$, pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a=2$, pentru care sistemul are o infinitate de soluții	**2p**
	Dacă $a=2$, soluția sistemului este $(x_0,y_0,z_0)=(\alpha-1,-\alpha+1,\alpha)$ și, cum α este număr real, obținem $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0=(\alpha-1)(-\alpha+1)+\alpha(-\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)=-(\alpha-1)^2\le 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale	**3p**
2.a)	$(-1)*2=\dfrac{-1+2}{4\cdot\lvert -1\cdot 2\rvert+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{4\cdot 2+1}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
b)	$z*0=\dfrac{z+0}{4\cdot\lvert z\cdot 0\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$0*z=\dfrac{0+z}{4\cdot\lvert 0\cdot z\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$z*z=\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z^2\rvert+1}$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$\left\lvert\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z\rvert^2+1}\right\rvert=\lvert z\rvert$ și z este număr complex nenul, deci $4\cdot\lvert z\rvert^2+1=2$, de unde obținem $\lvert z\rvert=\dfrac{1}{2}$ și, de exemplu, numerele distincte nenule $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ și $\dfrac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}}\cdot x-\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\dfrac{2x^4-x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{16}{x^4}}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16}{x\left(\sqrt{x^4+16}+x^2\right)}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)=2f(x)$, deci g este strict descrescătoare pe $(0,2)$ și g este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum g este continuă, $g(2)=4\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, obținem că ecuația $g(x)=m$ are exact două soluții pentru $m\in\left(4\sqrt{2},+\infty\right)$	**3p**

2.a)	$\int_0^3 e^x f(x)dx = \int_0^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_0^3 =$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	G este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x)=g(x)$, deci $G''(x)=g'(x)=$	**2p**
	$=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	**3p**
c)	$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)' \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx =$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} - 2\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-\sqrt{2}}{3}$, de unde obținem $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $5(1+2i)-2i(5-i)=3$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2+1\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $BC=10$ și $\sin B=2\sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-I_3\right)\left(A(x)-I_3\right)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5x+10\right)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\dfrac{1}{e}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\displaystyle\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5(1+2i)-2i(5-i)=5+10i-10i+2i^2=$	**3p**
	$=5+2\cdot(-1)=3$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a-3$, deci $a^2-2a-3=1+a^2$	**3p**
	$-2a=4$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+1=3^2 \Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**2p**
	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,1)$, de unde obținem $D(5,-4)$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$, $\sin C=\frac{AB}{BC}$, deci $AC=2AB$	**2p**
	Cum $AB^2+AC^2=100$, obținem $AB=2\sqrt{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)-I_3=\begin{pmatrix}x&-x&0\\x&-x&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=\begin{pmatrix}x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=2A(x)-I_3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2A(x)-I_3=xA(x)-(x-1)I_3 \Leftrightarrow (x-2)(A(x)-I_3)=O_3$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**3p**

2.a)	$0*2=(0+2)^2-2(0-2)-3=$ $=4+4-3=5$	**3p** **2p**
b)	$x*(x+1)=4x^2+4x$, pentru orice număr real x $4x^2+4x=8 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=1$	**2p** **3p**
c)	$(m+n)^2-2(m-n)-3=2mn \Leftrightarrow m^2+n^2-2m+2n-3=0$ $(m-1)^2+(n+1)^2=5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,1)$, $(2,1)$ și $(3,0)$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(2x-5)\sqrt{x}+\left(x^2-5x+10\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$ $=\frac{5x^2-15x+10}{2\sqrt{x}}=\frac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este crescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,2]$, deci f este descrescătoare pe $[1,2]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-5x+10}}\right)^{\frac{-5x+10}{x^2}\cdot\frac{x}{5}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+10}{5x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^2\left(x+e^x\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\right\|_0^2=$ $=2+e^2-1=e^2+1$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^1\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left.\ln\left(e^x+1\right)\right\|_{-1}^1=$ $=\ln(e+1)-\ln\frac{1+e}{e}=\ln e=1$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x+e^{-x}+1\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x-e^{-x}+x\right)'dx=\left.x\left(e^x-e^{-x}+x\right)\right\|_0^1-$ $-\int_0^1\left(e^x-e^{-x}+x\right)dx=e-\frac{1}{e}+1-\left.\left(e^x+e^{-x}+\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=\frac{5}{2}-\frac{2}{e}$ $\frac{5}{2}-\frac{2}{e}=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$, de unde obținem $m=5$	**3p** **2p**